1. Три спортсмена стартовали одновременно из одной точки круговой дорожки. Через некоторое время они вновь одновременно оказались в точке старта. Известно, что за это время самый быстрый спортс­мен обгонял самого медленного 12 раз (обгон в момент старта не учитываем). Сколько всего за это время было случаев, когда один из спортсменов обгонял другого? Спортсмены бегут равномерно, с различными скоростями.

Ответ. 23.

Решение. Быстрый спортсмен обгонял медленного 12 раз и догнал его в конце рассматриваемого промежутка времени, значит, он пробежал на 13 кругов больше медленного. Пускай средний спортсмен пробежал на х кругов больше медленного, это означает, что он пробежал на 13-х кругов меньше быстрого. То есть средний спортсмен обгонял медленного х-1 раз, а быстрый обгонял среднего 13-х-1=12-х раз. Всего обгонов было 12+х-1+12-х=23.

1. Сумма 7 различных натуральных чисел равна 29. Чему равно большее из этих чисел?

Ответ. 8.

Решение. Наименьшая возможная сумма 7 различных натуральных чисел равна 1+2+3+4+5+6+7=28. Наша сумма на 1 больше, значит, мы должны одно из чисел увеличить на 1. Но это возможно только в том случае, если мы вместо 7 возьмем 8, иначе будет нарушено условие, что все числа различные.

1. У мальчика в кармане пять монет. Если он наугад вытащит из кармана 3 монеты, среди них обязательно найдётся монета в 1 рубль. Если он наугад вытащит из кармана 4 монеты, среди них обязательно найдётся монета в 5 рублей. Сколько денег в кармане у мальчика? Ответ давать в рублях.

Ответ. 13.

Решение. Из первого условия следует, что не рублей у мальчика не более 2, а значит рублей не менее 3 (5-2=3). Из второго условия следует, что не пятирублевых монет у мальчика не более 3, а, значит, пятирублевых монет у него не менее 2 (5-3=2). Но всего у мальчика 5 монет, следовательно, три из них рублевые, а две пятирублевые. То есть сумма денег у мальчика равна 13.

1. У почтальона имеется несколько пачек конвертов по 50 штук в каждой пачке. Известно, что за 10 секунд он может отсчитать 10 конвертов. А за какое наименьшее число секунд он может отсчитать 80 конвертов?

Ответ. 20.

Решение. Одну пачку почтальон отдаст целиком, а из другой пачки отсчитает 20 конвертов, а остальные отдаст.

1. Король со свитой движется из пункта A в пункт B со скоростью 5 км/ч. Каждый час он высылает в пункт B гонцов, бегущих со скоростью 15 км/ч. С какими интервалами прибывают гонцы в пункт B? Ответ давать в минутах.

Ответ. 40.

Решение. Когда в путь отправится второй гонец, первый пробежит 15 км, а отряд пройдет 5 км. Значит, расстояние между 1 и 2 гонцами будет 10 км. После того, как 1 гонец прибудет в пункт В, второму гонцу потребуется 40 минут, чтобы преодолеть это расстояние.

1. В колонию из 125 черных бактерий попадает белая бактерия. Через секунду белая бактерия уничтожила одну черную, после чего все бактерии разделились пополам. Еще через секунду каждая белая бактерия уничтожила одну черную и снова все бактерии разделились пополам. Так продолжалось, пока все черные бактерии не были уничтожены. Через сколько секунд это произошло?

Ответ. 125.

Решение. Сначала было 125 черных и одна белая бактерия, через секунду их стало 248 черных и 2 белых, то есть на каждую белую бактерию приходится по 124 черных. Еще через секунду на каждую белую бактерию стало приходиться 123 черных, и так далее. С каждой секундой количество черных бактерий, приходящихся на 1 белую, уменьшается на 1. Значит, за 125 секунд они все будут уничтожены.

1. Известно, что шестизначный номер записан с помощью нулей и единиц, причем никакие две единицы не стоят рядом. Сколько таких номеров существует?

Ответ. 13.

Решение. Есть 2 варианта записать однозначный номер и три варианта (00, 01 и 10) записать двузначный. Если трехзначный номер начинается с 1, то дальше обязательно идет 0 и остается два варианта для последней цифры. Если трехзначный номер начинается с 0, то дальше можно поставить все что угодно, а потому количество вариантов в этом случае равно 3. То есть всего вариантов для трехзначного номера 2+3=5. Для четырехзначного номера, начинающегося с 1, количество вариантов равно количеству вариантов для двузначного номера, так как за единицей обязательно идет 0. Для четырехзначного номера, начинающегося с 0, количество вариантов равно количеству вариантов для трехзначного номера. То есть общее количество вариантов для четырехзначного номера равно 3+5=8. Аналогично для пятизначного номера количество вариантов равно 5+8=13, а для шестизначного 8+13=21. Таким образом ответ у меня неправильный.

1. Учительница предложила написать на доске в порядке возрастания несколько натуральных чисел, не превосходящих 100, причем разность соседних чисел должна быть не меньше 7, а чисел должно быть как можно больше. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ. 16.

Если писать числа, начиная с 1 и с шагом 7, то мы получим: 1, 8, 15, ….99 – всего 15 чисел. Очевидно, что больше 15 получить невозможно, так как все числа можно разбить на группы 1-7, 8-14, … 92-98, 99-100, и из каждой группы можно взять не более одного числа. Однако наш способ найти 15 чисел не единственный. Во-первых, мы можем начать с числа 2: 2, 9, 16, … , 100. Это второй способ. А так же мы можем увеличить на 1 любой промежуток между числами, взятыми в первом способе. Например: 1, 9, 16, …, 100. Или: 1, 8, 16, 23, …, 100. Так как между 15 числами имеется 14 промежутков, то мы имеем еще 14 способов. Всего их число равно 1+1+14=16.

1. Сколько всего существует пятизначных чисел, из которых можно получить число 3133, удалив одну цифру?

Ответ. 45.

Решение. Допустим, что удаленная цифра находилась на первом слева месте. Таких чисел имеется 9. Если удаленная цифра была на втором месте, то мы можем написать 10 таки чисел, но одно из них (33133) будет совпадать с тем, которое мы уже сосчитали первый раз. Таким образом, новых чисел мы получим тоже 9. Если удалена цифра с третьего места, то опять-таки мы получаем 10 вариантов, один из которых уже был сосчитан (31133), то есть 9 новых вариантов. Рассмотрев случаи, когда удаленная цифра была на 4 или 5 местах мы получим еще 9+9=18 новых вариантов, поскольку число 31333 уже было сосчитано ранее.

1. Натуральные числа 1, 2, 3, … 99, 100 расставили по окружности так, что разность между двумя соседними числами (от большего отнимают меньшее) не превышает 2. Рядом с какими числами стоит число 50? В ответе записать сначала меньшее из этих чисел, потом большее без пробелов.

Ответ. 4852.

Решение. Рядом с числом 100 можно поставить только 2 числа: 99 и 98. С одной стороны от числа 99 стоит 100, а с другой можно поставить только 97, потому что 98 уже занято. Рядом с 98 можно поставить только 96, так как 97 уже стоит в другом месте. Рассуждая таким образом, получим с одной стороны от числа 100 последовательность четных чисел 98, 96, 94, … , а с другой стороны последовательность нечетных чисел 99, 97, 95, … . Число 50 попадает в первую из этих последовательностей и соседними с ним числами являются 48 и 52.