**ЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ**

**В СХЕМЕ ВЕЙЛЯ**

Учитель математики МОУ ВСОШ №2 г. Твери

Кудрявцева Т.И.

План реферата.

I.Понятие аксиоматического метода.

1.Непротиворечивость.

2.Независимость.

3.Категоричность.

II.Построение геометрии по схеме Вейля.

1. «Векторная аксиоматика» по Вейлю.

2.Некоторые следствия из аксиом.

3. Евклидова геометрия в схеме Вейля.

4. Определение некоторых геометрических понятий

в аксиоматике Вейля.

III.Применение евклидовой геометрии в системе Вейля

к доказательству некоторых теорем.

**I.**Аксиоматический метод впервые был применен при изучениигеометрии Евклидом. Его «Начала» построены следующим образом: сначала даются основные понятия и перечисляются основныедопущения – постулаты и аксиомы; затем идут предложения (теоремы), которые Евклид стремился доказать по правилам логикина основании принятых постулатов и аксиом. Первые представления об этом методе учащиеся получают при изучении школьногокурса геометрии. Здесь справедливость теорем устанавливается припомощи доказательств, опирающихся на определения, аксиомы иранее полученные теоремы. Таким образом, мы получаем, чтоаксиомы - это простейшие отправные предложения геометрии,принимаемые без доказательств. Аналогичное положение имеетместо при определении понятий. Всякое понятие определяетсячерез аксиомы и ранее введенные понятия. Эти последние всвою очередь определяются через аксиомы и ранее введенныепонятия и т.д. В результате приходят к понятиям, которые ужене сводятся к более простым. Эти отправные понятия, принимаемые без определений, называются основными (неопределяемыми).В аксиомах перечисляются все необходимые свойства основныхотношений между основными объектами.При аксиоматическомпостроении математической теории некоторые предложения принимаются в качестве аксиом, из которых другие предложения выводятся по правилам формальной логики. Однако не всякую совокупность предложений данной теории можно принять в качествесистемы аксиом. Основными требованиями, предъявляемыми к системе аксиом, являются требования **непротиворечивости илисовместности, независимости и категоричности.**

1. Система аксиом называется непротиворечивой или совместной,если в этой теории невозможно доказать какое-нибудь предложение А и его отрицание.
2. Непротиворечивая система аксиом называется независимой,еслини одна из аксиом этой системы не может быть выведена из остальных аксиом как теорема.
3. Непротиворечивая система аксиом называется категоричной, если любые две её модели изоморфны.

С понятием категоричной системы аксиом тесно связано понятие дедуктивно полной системы. Непротиворечивая система аксиом называется дедуктивно полной, если в определяемой ею теории любое предложение либо доказуемо, либо опровержимо.

**II.** Традиционный путь построения геометрии, идущий от Евклида и закрепленный Д.Гильбертом в его аксиоматике геометрии (1899), является самым известным, но отнюдь не единственно возможным. Так, например, совершенно иной путь построения геометрии был предложен в 1917г. знаменитым немецким математиком Г.Вейлем. Система аксиом Вейля описывает основные шесть понятий, два из которых-**точки и векторы**-называются основными объектами. Понятия «**сложение векторов**», «**умножение вектора на число**», «**скалярное умножение векторов**» и «**откладывание вектора от точки**» называются основными соотношениями. Прямые, плоскости, равенство фигур и т.п. определяются через эти первоначальные понятия и отношения. Совокупность всех точек и векторов обозначаются соответственно **T**и **V**. Аксиомы Вейля распределяются на пять групп.

**1.Аксиомы сложения векторов.**

1.Сложение векторов коммутативно, т.е. , **V** ( + = + ).

2.Сложение векторов ассоциативно, т.е. ,,**V** ( (+ )+ =+(+)).

3.Существует такой вектор , что для є**V**( + = ).

4.Для любого вектора существует такой вектор ', что + ' = .

Вектор называется нулевым, а ' – вектором, противоположным вектору .

Эта группа аксиом описывает отображениеϕ₁:**VVV**, называемое операцией сложения векторов, которая позволяет поставить в соответствие , третий вектор φ₁ (,), называемый суммой векторов и и обозначаемый символом + .

**2.Аксиомы умножения вектора на действительное число.**

Эти аксиомы описывают отображение ϕ₂: **VRV**, называемое умножениемвектора на действительное число.Каждому вектору и числу λє**R** однозначно сопоставляется вектор ϕ₂( λ, ), называемый произведением вектора на число λ и обозначаемый символом λ.

.

1. Операция ϕ₂ дистрибутивна относительно сложения векторов:

,є**V**, λ є **R**( λ( + ) = λ + λ ).

1. Операция ϕ₂ дистрибутивна относительно сложения чисел:

є**V**, λ, μє**R**(( λ + μ ) = λ + μ ).

1. Операция ϕ₂ ассоциативна:

є**V**, λ , μє**R** (λ (μ ) = ( λμ ) ).

1. Операция ϕ₂ умножения вектора на единицу не изменяет вектора :

є**V**( 1 = ).

Аксиомы **I**и **II** позволяют определить понятие векторного пространства: **векторным пространством над полем действительных чисел R**называется множество **V**, для элементов (векторов) которого определены операции сложения векторов

ϕ₂ ( , ) = + и умножения вектора на действительное число

ϕ₂ ( λ , ) = λ так, что выполняются требования аксиом **I**и**II.**

Из определения изоморфизма следует , что 1) тождественное отображение **VV** является изоморфизмом; 2) отображение , обратное изоморфизму, является изоморфизмом; 3) если f₁:**VV'** и f₂: **V'V''** - изоморфизмы, то отображение f₂ f₁ пространства **V**на пространство **V''**также является изоморфизмом. Следовательно, **отношение изоморфизма является отношением эквивалентности** ( т.е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно).

**3.Аксиомы размерности.**

1. Существуют три линейно независимых вектора ₁ ,₂ , ₃ :

λ₁₁ + λ₂₂ + λ₃₃ = λ₁ = λ₂ = λ₃ = 0.

2. Любые четыре вектора, , , линейно зависимы:

, , , λ₁, λ₂, λ₃, λ₄ ( λ₁ + λ₂ + λ₃ + λ₄ = λ₁2 + λ₂2 + λ₃2 + λ₄2 0 ) , где , , , є**V**; λ₁, λ₂, λ₃, λ₄є**R**.

Аксиомы **I - III**позволяют ввести понятие трехмерного векторного пространства: векторное пространство **V** называется **векторным пространством V3 над полем R**, если выполняются аксиомы 1-2 размерности.

Чтобы получить аксиоматику n-мерного векторного пространства над полем **R**, аксиомы 1-2 заменяют так:

1'. Существуют n линейно независимых векторов: ₁ ,₂ ,…, n.

2''. Всякая система, содержащая n+1 вектор, линейно зависима.

Множество **V**, для элементов которого определены операции сложения и умножения их на действительные числа с соблюдением аксиом **I–III**, называется **n-мерным векторным пространством** и обозначается **Vn**.

Любая система nлинейно независимых векторов пространства **Vn** называется  **базисом**.

**4.Аксиомы скалярного произведения векторов.**

Эта группа аксиом описывает отображение ϕ₃ :**V₃V₃R**,

называемое**операцией скалярного умножения векторов**. Вводится следующее обозначение : ϕ₃ (, ) = .

1.Скалярное произведение коммутативно, т.е. (,є**V**: =).

2.Скалярное произведение векторов линейно, т.е.(,,є**V**; λ,μє**R**:

(,λ+μ)=λ+μ).

3.0, если ; =0, если =, т.е. є**V** (0 ;==0).

Векторное пространство **V₃**, в котором определена операция скалярного умножения векторов так, что выполняются требования аксиом **IV**, называется **евклидовым векторным пространством V₃**. Два евклидовых векторных пространства **V**и**V'**называются =**изоморфными**, если существует взаимно однозначное линейное отображение fпространства **V**на**V'**, сохраняющее операцию скалярного умножения векторов.

Неотрицательная величина ││=называется **длиной вектора .**

**Углом между векторами** и называется число ϕ ( 0ϕ ), определяемое из условия =.

Из курса алгебры известно, что для ,є**V₃**выполняется неравенство Коши-Буняковского: ││││││.

В пространстве **V₃** можно построить ортонормированный базис,т.е. базис ,,, состоящий из попарно ортогональных и единичных векторов: ₁²=₂²=₃²=1 ; ₁₂=₁₃=₂₃=0.

Скалярное произведение двух векторов ,, скалярный квадрат вектора и косинус угла между двумя векторами в ортонормированном базисе выражаются соответственно формулами:

=x₁y₁ + x₂y₂ + x₃y₃, ²= x₁² + x₂² + x₃²,

= , где x₁ , x₂ , x₃- координаты вектора ;

y₁ ,y₂ , y₃ -координаты вектора в данном базисе.

**5.Аксиомы откладывания векторов.**

Эта группа аксиом описывает операцию откладывания векторов

ϕ₄: **TTV**,сопоставляющую двум упорядоченным точкам А,В**Т**, вектор ϕ₄( А,В ), обозначаемый .

1.Для каждой фиксированной точки А**T**отображение **TV,**

определенное по закону ϕ₄(А,В)=,является взаимно однозначным

отображением множества точек В**T**на множество векторов из **V**.

2.Для любых трех точек А, В, С справедливо равенство:+=.

**Некоторые следствия из аксиом I- V**.

Аксиомами групп **I- V**исчерпывается аксиоматика Вейля. Из этих аксиом непосредственно вытекают такие теоремы.

**Теорема 1**.

Любой из векторов ( А **Т** ) является нулевым вектором пространства **V**.

Действительно, для А, Х**Т** справедливо равенство: +=.

Т.к. **V** может быть любым вектором пространства V, то вектор = .

**Теорема 2**. = -.

В самом деле , полагая в аксиоме треугольника( V, 2 ) С=А, получим: + = = , т.е. векторы и противоположные.

**Теорема 3**. Если =, то точки А и В совпадают.

Согласно аксиоме треугольника имеем: + = .Далее по условию дано, что = и, следовательно, = . Отсюда вытекает, что = и по аксиоме ( V, 1 ) точки А и В совпадают.

**Непротиворечивость системы аксиом Вейля**.

Непротиворечивость системы аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства можно установить при условии непротиворечивости теории действительных чисел. С этой целью построим модель системы аксиом I-V, называемую  **арифметической**, т.к. её векторы и точки являются наборами чисел. Назовем **точкой** или **вектором** любой упорядоченный набор трех действительных чисел х₁ , х₂ , х₃. Введем обозначения: ( х₁, х₂, х₃ )-точки,

–векторы, где х₁, х₂, х₃ - координаты точки (соответственно вектора).

Сложение векторов по определению осуществляется покоординатно:

+ = .

Требования аксиом ( I , 1-4 ) при этом будут удовлетворены, в чем легко убедиться проверкой. Умножение действительного числа λ на вектор = понимается как обычное умножение числа λ на каждое из чисел х₁, х₂, х₃: λ = . Так определенная операция умножения удовлетворяет всем аксиомам ( II, 1-4 ). Аксиомы (III, 1-2 ), очевидно, также выполняются: векторы , , - линейно независимы и образуют базис пространства. Можно определить и операцию скалярного произведения двух векторов. Пусть = , = – произвольные векторы. Скалярным произведением векторов и называется величина : = х₁у₁ + х₂у₂ + х₃у₃ . Так определенная операция удовлетворяет требованиям аксиом ( IV, 1-3). Если рассмотреть аксиомы(V,1-2) откладывания векторов, то можно доказать их выполнимость в приведенной интерпретации. Определим отображение σ: **TTV**, полагая для А(а₁,а₂,а₃), В(в₁,в₂,в₃) : σ(А,В) = = .

Аксиома V.1 утверждает, что для данной произвольной точки А(а₁,а₂,а₃) и данного вектора = существует такая точка В(в₁,в₂,в₃) , что = . Докажем это. Действительно, искомая точка В определяется следующим упорядоченным набором чисел: в₁=а₁+х₁, в₂=а₂+х₂, в₃=а₃+х₃.

Можно убедиться в справедливости аксиомы V.2, в соответствии с которой + = для А,В,С. Пусть А(а₁,а₂,а₃) , В(в₁,в₂,в₃) , С(с₁,с₂,с₃). Отсюда следует, что = , = , = . Непосредственной проверкой убеждаемся, что вектор + = , т.е. он равен вектору .

Все аксиомы I-V выполнены, значит получен важный вывод:

система аксиом Вейля евклидовой геометрии непротиворечива, если непротиворечива арифметика действительных чисел.

Аксиомы I-V определяют структуры , называемые **трехмерным евклидовым пространством**. Каждая из этих структур имеет два базисных множества **T**, **V** и четыре отношения P₁ - P₄, которые описываются операциями ϕ₁, ϕ₂, ϕ₃, ϕ₄ , удовлетворяющими требованиям аксиом Вейля I-V. Символически структуры записываются так:= (**T**,**V**,P₁, P₂, P₃, P₄ )или = (**T**, **V**, ϕ₁, ϕ₂, ϕ₃, ϕ₄ ).

Совокупность**Т** элементов (точек) называется **евклидовым (точечным) пространством Е₃**, если она совместно с совокупностью векторов**V**, определенной аксиомами I- IV, допускает операцию откладывания векторов ϕ₄, удовлетворяющую требованиям аксиом V.называется **ассоциативным пространством**  с **Е₃.**

**Определение**. **Евклидовой геометрией**  называется теория структур .

Её теоремы выводятся из аксиом I-VВейля посредством логических выводов. Пусть- евклидово трехмерное пространство, М-произвольная точка пространства **Е3**. Совокупность точкиО**Е3** и векторов , , ортонормированного базиса пространства **V3** называется **декартовой прямоугольной системой координат** (О , ). Разлагая вектор **V3**по векторам базиса , получим: =х1+ х2 + х₃ , где х₁,х₂,х₃- действительные числа. Числа х₁,х₂,х₃ **R**, соответствующие точке М, называются декартовыми прямоугольными координатами этой точки, векторы , , – координатными векторами, О – началом прямоугольной системы координат. Нетрудно проверить, что если ( а₁,а₂,а₃) и ( в₁ ,в₂,в₃ ) – прямоугольные координаты точек А и В, т.е. если =а₁+а₂+а₃ , =в₁+в₂+в₃ , то  **расстояние**d ( А,В ), которое по определению равно длине вектора =(в₁-а₁) + (в₂-а₂) + (в₃-а₃), вычисляется по формуле : d( А,В )= .

**Углом**  между ненулевыми векторами и называется число ϕ(0ϕ), удовлетворяющее условию:

= .

Существование такого числа следует из неравенства Коши – Буняковского: ()2 ()2 ()2 .

Взаимно однозначное отображение f: **EE'**евклидова пространства **Е**на евклидово пространство **Е'** называется **изоморфизмом**, если 1)для отображения fсуществует индуцированное отображение : **VV' ;** 2) - изоморфное отображение **V**на V'.

Можно убедиться, что отношение изоморфности**V,V'**является отношением эквивалентности, т.е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Позже будет доказано, что любые два евклидовых пространства изоморфны между собой.

Аксиоматика I-IVтеории евклидова векторного пространства категорична, т.е. если векторы ,**V** переходят при изоморфизме в ',', то + , λ переходят соответственно в ' + ', λ'; кроме того, = ' '. Установим категоричность системы I- Vаксиом Вейля, т.е. докажем изоморфизм любых двух евклидовых пространств **Е₃** и **Е₃'** . Выберем в евклидовых пространствах **Е₃** и **Е₃'** прямоугольные системы координат О и О'''' и отобразим первое пространство на второе, считая образом точки М(х₁,х₂,х₃)**Е₃** точку М' **Е₃'**, которая в системе О'''' имеет те же координаты х₁, х₂, х₃, которые имеет точка М в системе О :=х₁+х₂+х₃ , = х₁' + х₂' + х₃'.

Построенное отображение fявляется изоморфизмом: f–взаимно однозначное отображение и порождает линейное отображение :**V₃V₃'**, которое сохраняет скалярное произведение любых двух векторов. Предположим, что N( у₁,у₂,у₃ ) переходит прив N' = f( N ), тогда =(, где = у₁ + у₂ + у₃ , = у₁ + у₂ + у₃. Тогда для любых векторов , и , выполняется равенство: =, т.е. изоморфно отображает **V₃** на **V₃'**. Таким образом, f будет изоморфизмом пространств**Е₃** и **Е₃'**.

**Определение некоторых геометрических понятий в аксиоматике Вейля**.

**1.Прямая.**

Пусть А,В – две различные точки. Множество точек М таких, что вектор

коллинеарен вектору, т.е. = t, где t**R**, называется  **прямой**. (АВ)=, где t- аффинный параметр на прямой, а = – направляющий вектор прямой.

Пусть M₁(t₁), M₂(t₂), M₃(t₃) – три различные точки прямой. Говорят, что точка М₂ лежит между точками М₁ и М₃ тогда и только тогда, когда все три точки различны и число t₂∊]t₁,t₃[. Понятие «лежать между» позволяет ввести понятие отрезка. Совокупность двух точек М₁,М₃ и всех тех точек , которые лежат между ними, называется **отрезком**. Точки называются внутренними точками отрезка М₁М₃, а точки М₁,М₃ называются концами отрезка М₁М₃. Если параметр t 0, то полученное множество точек называется  **лучом** с началом А(0).

Если обозначить радиус-векторы , соответственно через , , то уравнение прямой приводится к виду: = + t, где = – направляющий вектор прямой, t – параметр.

**2.Плоскость.**

Пусть А,В,С – различные точки, не принадлежащие одной прямой. Множество точек М, таких, что вектор является линейной комбинацией векторов и , т.е. = u + v, где u,v**R**, называется **плоскостью** , т.е. = . Числа *u,v* называются аффинными параметрами точек плоскости, а векторы = , = - базисными(направляющими) её векторами. Нетрудно установить, что плоскость однозначно определяется любыми тремя её точками, не принадлежащими одной прямой.

**3.Прямая и плоскость.**

Прямые d₁ , d₂ называются  **параллельными**, если их направляющие векторы коллинеарны. Из определения следует, что отношение параллельности двух прямых является отношением эквивалентности, т.е. оно рефлексивно (dd), симметрично ( если d₁ d₂ , то d₂d₁) и транзитивно (если d₁d₂ , d₂d₃ , то d₁d₃).

Замечание: параллельные прямые либо не имеют общих точек, либо совпадают.

В самом деле, если d₁d₂ и , – направляющие векторы, то =λ. Т.о., если прямые d₁, d₂ имеют общую точку А, то прямая d₁ , определяемая точкой А и вектором = λ, совпадает с прямой d₂ , определяемой той же точкой А и вектором .

Через каждую точку пространства проходит одна и только одна прямая, параллельная данной прямой d.

В самом деле, прямая d₁ = проходит через точку А и параллельна прямой d. Единственность прямойd₁ следует из приведенного замечания.

**Прямые** называются  **перпендикулярными**, если их направляющие векторы ортогональны.

**Вектор** называется **перпендикулярным плоскости** , если он ортогонален любому вектору плоскости.

**Прямая р**называется **перпендикулярной плоскости** ( р), если направляющий вектор прямой ортогонален любому вектору плоскости. Если р , р₁ р, то р₁ .

**Две плоскости** называются **параллельными**, если они либо не имеют общих точек, либо совпадают.

**Прямая и плоскость** называются  **параллельными**, если направляющий вектор прямой коллинеарен некоторому вектору данной плоскости.

Если в уравнении плоскости параметр u0, а параметр v – произвольные действительные значения, то получим **полуплоскость** с границей (АС): (АС,В)=.

Пересечение полуплоскостей (АС,В), (АВ,С) называется**углом** (выпуклым) (.

Пусть = + u + v - уравнение плоскости. Множество точек, которое получается из этого уравнения при произвольном изменении каждого из параметров u , v в промежутке , по определению называется  **параллелограммом**; точки А₀(), ( + ), i=1,2, ( + + ) – его вершинами. Параллелограмм, у которого направляющие векторы , перпендикулярны, называется **прямоугольником**.

Из всего приведенного выше можно заметить, что в отношении основных определений и теорем построение геометрии по Вейлю довольно мало отличается от традиционного.Доказательства же, напротив, как правило, совершенно отличны от традиционных. При этом, если в традиционном построении геометрии доказательства основываются на довольно зыбких аксиомах (полный список которых школьникам не сообщается ) и существенно апеллируют к наглядным представлениям, то здесь имеем последовательное дедуктивное построение геометрии. При решении задач учащиеся могут использовать как традиционные методы ( со ссылками на строго доказанные теоремы ), так и новые векторные методы.

**III**. **Доказательство некоторых теорем евклидовой геометрии в системе Вейля.**

**1.Теорема косинусов.**

Пусть дан треугольник с вершинами А,В,С и В

противолежащими им сторонами а,в,с.

Так как = + , то обозначая = ,

=, = -, будем иметь: = - . А С

Возведя обе части равенства в квадрат,получим:

² = ² + - 2. Но это соотношение можно переписать в виде :

**с² = а² + в² - 2ав.** Эта формула и выражает теорему косинусов:

**квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.**

Если угол С – прямой, то получим равенство: с = а² + в², выражающее теорему Пифагора.

**2.Теорема синусов.**

Умножая обе части равенства: = - (1) на + , получим: (+)=² - ². Это соотношение можно переписать так: с(а - в) = а² - в² (2). Умножая (1) скалярно на , мы выразим сторону с в виде: с=а+в (3). Учитывая далее (2) и (3), получим: а² - в² = а² - в². Следовательно, в² = а² или в=а. Заменяя в этой формуле в и В на с и С, получим: с = а. Ясно, что последние две формулы можно переписать в виде: = = .

Эти соотношения и выражают теорему синусов: **синусы углов треугольника относятся как противолежащие им стороны**.

**3.Теорема ( о двух перпендикулярах ).**

**Если прямая перпендикулярна двум непараллельным прямым, лежащим в некоторой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.**

Доказательство.

r

Обозначим через О точкуqM

N

O p

пересечения непараллельныхM

прямых p,q. Прямую,

перпендикулярную прямым pи q, обозначим через r. Возьмем на прямыхpи q некоторые векторы и с началом в точке О. Векторы и неколлинеарны, следовательно, линейно независимы. Для любой точки М плоскости векторы,, линейно зависимы. Таким образом, =λ+μ.

Возьмем произвольный вектор на прямой . Так как ==0, то = (λ+μ)=0. Если N-любая другая точка данной плоскости, то =(-) = - = 0. Итак, любой вектор плоскости ортогонален вектору , т.е. прямая r перпендикулярна плоскости.

**4.Теорема (о трех перпендикулярах).**

**Если наклонная ОА перпендикулярна некоторой прямой ОВ, лежащей в плоскости , то её проекция ОС на эту плоскость также перпендикулярна прямой ОВ.**

Доказательство.

По условию имеем = 0. Требуется доказать, что = 0.

Так как = - (), где – векторА

Ортогональной плоскости , то =

С О**,** В

(-)=0, т.е. проекция ОС ОВ.

Справедлива и обратная теорема.

В самом деле, пусть проекция ОС наклонной ОА на плоскость перпендикулярна прямой ОВ. Тогда из формулы ()следует, что

=( + )=0, т.е. ОА ОВ.

**5.Теорема (о средней линии треугольника).**

**Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.**

Доказательство.

Есливвести обозначения, показанные -

на рисунке, то будем иметь: МN

= +-, = -+ ,-

откуда 2= , или =,*a*

что и дает требуемый результат.

Аналогично доказывается теорема о средней линии трапеции.

Таким образом, векторы как бы связывают в единый узел основные идеи, лежащие в основе современного понимания геометрии. Векторные пространства – это есть, по существу, элементарная геометрия нашего времени.

Литература.

1.Болтянский В.Г. и Яглом И.М.

а)Векторы в курсе геометрии средней школы. М.,Учпедгиз,1962.

б)Преобразования. Векторы. М., «Просвещение», 1964.

2.Клопский В.М., Скопец З.А., Ягодовский М.И. Геометрия 9-й кл. и 10-й кл. Пробные учебники. М., «Просвещение», 1967 и 1971.

3.Ефимов Н.В. и Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М., «Наука», 1970.

4.Кокстер Г.С. Введение в геометрию. М., «Наука», 1970.

5.Шоке Г. Геометрия. М., «Мир», 1970.

6.Гильберт Д. Основания геометрии. М.-Л. 1948. 491с.

7.Евклид. Начала I. М.-Л., 1948. 447с.

8.Базылев В.Т., Дуничев К.И. Геометрия. М., 1975, ч.II. 364с.

9.Егоров И.П. Геометрия. М. 1979. 256с.

10.Егоров И.П. Основания геометрии. М., «Просвещение», 1984.

11.Новое в школьной математике. Сборник. М., «Знание», 1972.