4 класс

1. Баба-Яга вошла в комнату, где вокруг круглого стола стояло 100 стульев и на некоторых из них сидели гости. Оказалось, что она не может сесть так, чтобы рядом с ней никто не сидел. Какое наименьшее число гостей могло в этот момент сидеть за столом?
2. На клетчатой бумаге нарисован квадрат размером 3х3. Какое наибольшее число прямоугольников можно расположить в этом квадрате так, чтобы ни один из прямоугольников не содержался в другом. Прямоугольники должны состоять из целого числа клеток.
3. Веревочку сложили пополам, потом еще раз пополам, еще раз пополам и четвертый раз пополам, а потом разрезали ножницами. Сколько маленьких веревочек при этом получилось?
4. Числа 1,2,3,4, ..... 25 расставляют в таблицу 5х5 так, чтобы в каждой строке числа были расположены в порядке возрастания. Какое наибольшее значение может иметь сумма чисел в третьем столбце?

Решения.

1. Число гостей будет наименьшим, если наибольшим будет количество свободных стульев. Из условия задачи следует, что между соседними гостями нигде не было трех свободных стульев. Занумеруем места по часовой стрелке и рассадим гостей так: 1, 4, 7, 10, … 97, 100 – всего 34 человека. Если же попытаться рассадить 33 человека, то за каждым из них по часовой стрелке будет не более 2 свободных мест, то есть всего будет 66 свободных мест, и на сотый стул придется сажать еще одного человека.
2. Наибольшее число прямоугольников получится, если рассмотреть все прямоугольники, состоящие из 2 клеток. Таких прямоугольников будет 12.
3. Веревочка сложена в 16 слоев, поэтому при разрезании ножницами получится 16 разрезов. Это означает, что веревочка распадется на 17 частей.
4. Рассмотрим числа, стоящие в 3 столбце и расположим их в порядке возрастания: a,b,c,d,e. Максимальное значение для е равно 23, так как больше него должны быть как минимум 2 числа. Больше d должны быть 5 чисел (два числа, которые стоят справа от d, число е и два числа стоящие справа от е). То есть максимальное значение для d равно 20. Точно также доказываем, что максимальное значение для с равно 17, для b – 14, для а – 11. Таким образом. Наибольшая сумма будет равна 85. Например, числа можно расставить так.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 11 | 12 | 13 |
| 3 | 4 | 14 | 15 | 16 |
| 5 | 6 | 17 | 18 | 19 |
| 7 | 8 | 20 | 21 | 22 |
| 9 | 10 | 23 | 24 | 25 |

5 класс

1. Таблица состоит из двух столбцов. В каждой строке, начиная со второй, записаны сумма и разность чисел предыдущей строки (всегда из большего числа вычитают меньшее). Чему равна сумма чисел в первой строке этой таблицы, если в 7 строке записаны числа 88 и 64?
2. На клетчатой бумаге нарисован квадрат размером 4х4. Какое наибольшее число прямоугольников можно расположить в этом квадрате так, чтобы ни один из прямоугольников не содержался в другом. Прямоугольники должны состоять из целого числа клеток.
3. Сколько существует двузначных чисел, которые при перестановке цифр увеличиваются не менее чем в три раза?
4. Вася выписал в ряд несколько различных натуральных чисел, меньших 11. Оказалось, что в любой паре соседних чисел одно из них делится на другое. Какое наибольшее количество чисел мог выписать Вася?

Решения

1. Заметим, что, складывая сумму и разность двух чисел, мы получаем удвоенное уменьшаемое, а вычитая из суммы разность, мы получаем удвоенное вычитаемое. Поэтому числа в третьей строке получаются из чисел первой строки умножением на 2, числа пятой строки получаются умножением на 2 из чисел третьей строки, а числа седьмой строки получаются умножением на 2 из чисел пятой строки. Это означает, что в первой строке записаны числа 11 и 8.
2. Наибольшее число прямоугольников получится, если рассмотреть все прямоугольники размером 2×2 и 3×1. Таких прямоугольников будет 25.
3. Это числа 15, 16, 17, 18, 19, 29 – всего 6 чисел.
4. 9 чисел расставить можно, например, так: 10, 5, 1, 9, 3, 6, 2, 4, 8. Докажем, что десять чисел расставить нельзя. Если бы это можно было сделать, то число 7 стояло бы с краю рядом с числом 1. Отбросим эти два числа и попытаемся расставить остальные 8 чисел. Очевидно, что с краю должно стоять число 5 (рядом с числом 10), а с другого края – число 9 (рядом с числом 3). Тогда числа 2, 4, 8 должны стоять внутри, при этом 4 должно находиться между 2 и 8, а 8 – между 2 и 4. Противоречие доказывает, что 9 чисел – наилучший вариант.

6 класс

1. Вася выписал в ряд несколько различных натуральных чисел, меньших 11. Оказалось, что в любой паре соседних чисел одно из них делится на другое. Какое наибольшее количество чисел мог выписать Вася?
2. Два различных трехзначных числа назовем родственниками, если они записаны одинаковыми тройками цифр. Например, 244 и 424 – родственники. Какое наименьшее количество родственников может иметь число, у которого сумма цифр равна 10?
3. Коробка конфет стоит на 20% дороже шоколадки и на 40% дешевле торта. На сколько процентов торт дороже шоколадки?
4. Подряд написаны числа 1,2,3,…,2000. Первое, третье, пятое и т.д. по порядку вычеркивают. Из оставшихся 1000 чисел снова вычеркивают первое, третье, пятое и т.д. Так делают, пока не останется одно число. Что это за число?

Решения.

1. Смотрите решение задачи 4 для 5 класса.
2. Числа 550 и 505 имеют по одному родственнику. Число, не имеющее родственников, получается в двух случаях: если у него все три цифры одинаковые и если две цифры из трех – нули. Очевидно, что в данном случае ни то, ни другое невозможно.
3. Если х – цена шоколадки, а у – цена торта, то коробка конфет стоит, с одной стороны, 1,2х, а с другой стороны, 0,6у. Отсюда следует, что у=2х, то есть торт на 100% дороже шоколадки.
4. После первого вычеркивания остаются числа, которые делятся на 2, после второго – числа, делящиеся на 4, после третьего – на 8 и так далее. В конце концов останется число 1024.